

# Ensaio de Hipóteses - Paramétricas



Questão

Qual o peso médio das maçãs do pomar?

Hipótese estatística

$\mu = 130\text{grs?}$

Ensaio de hipóteses paramétricas são **sempre** ensaios sobre os valores dos parâmetros da população : média, variância, proporção, ...

# Ensaio de Hipóteses

8 passos de um Ensaio de Hipóteses:

1. Dados

2. Distribuição da população

3. Hipóteses

4. Escolha da estatística teste

5. Distribuição da estatística teste

6. Regra de decisão

7. Cálculo do valor da estatística teste \valor-p.

8. Teste mais potente – Lema de Neyman-Pearson

9. Decisão estatística

# Ensaio de Hipóteses

## 1. Dados



Recolha de  
informação

Maças de um pomar → 10 maçãs

Peso das maçãs

Saltos em comprimento  
de um atleta → 20 saltos

Comprimento dos saltos

População de um  
concelho → 50 residentes  
no concelho

Prática desporto

# Ensaio de Hipóteses

## 2. Distribuição que melhor representa o comportamento da característica da população que nos interessa é conhecida

População	Questão de interesse	Distribuição
Maças de um pomar	Peso médio das maçãs do pomar	Normal Variância conhecida
Saltos em comprimento de um atleta	Variância do Comprimento dos saltos	Normal Variância desconhecida
População de um conelho	Proporção que pratica desporto	Bernoulli

# Ensaio de Hipóteses

## 3. Hipóteses

São sempre sobre os valores dos parâmetros da população



Hipótese alternativa

**NÃO SOBRE OS VALORES DAS AMOSTRAS OU DAS ESTATÍSTICAS!**



Hipótese nula

É a hipótese que se vai testar  
Status Quo \ Ausência de Efeito

# Ensaio de Hipóteses

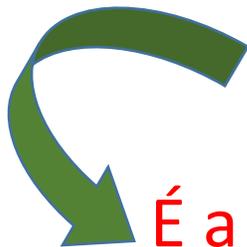
## 3. Hipóteses



Hipótese nula



Hipótese alternativa



É a hipótese que se vai testar  
Status Quo \ Ausência de Efeito

Espaço dos parâmetros

$$\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$$

Questão de interesse

$$H_0: \mu = 130 \text{ grs}$$

$$H_1: \mu = 150 \text{ grs}$$

Peso médio das maçãs do pomar

$$H_0: \mu = 130 \text{ grs}$$

$$H_1: \mu \neq 130 \text{ grs}$$

$$H_0: \mu \leq 130 \text{ grs}$$

$$H_1: \mu > 130 \text{ grs}$$

$$H_0: \mu \geq 130 \text{ grs}$$

$$H_1: \mu < 130 \text{ grs}$$

$$\Theta = \{\mu \in (-\infty, +\infty)\}$$

# Ensaio de Hipóteses

## 3. Hipóteses



Hipótese  
nula



Hipótese  
alternativa

Questão de  
interesse

$$H_0: \sigma^2 = 0.5 \text{ mts}$$

$$H_1: \sigma^2 = 0.7 \text{ mts}$$

$$\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta = \{\sigma^2 \in (0, +\infty)\}$$

$$H_0: \sigma^2 = 0.5 \text{ mts}$$

$$H_1: \sigma^2 \neq 0.5 \text{ mts}$$

$$H_0: \sigma^2 \leq 0.5 \text{ mts}$$

$$H_1: \sigma^2 > 0.5 \text{ mts}$$

$$H_0: \sigma^2 \geq 0.5 \text{ mts}$$

$$H_1: \sigma^2 < 0.5 \text{ mts}$$

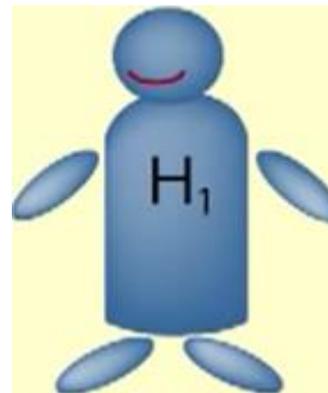
Variação do  
comprimento  
do salto de um  
atleta

# Ensaio de Hipóteses

## 3. Hipóteses



Hipótese  
nula



Hipótese  
alternativa

Questão de  
interesse

$$H_0: \theta = 0.35$$

$$H_1: \theta = 0.4$$

$$\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta = \{\theta \in [0, 1]\}$$

$$H_0: \theta = 0.35$$

$$H_1: \theta \neq 0.35$$

$$H_0: \theta \leq 0.35$$

$$H_1: \theta > 0.35$$

$$H_0: \theta \geq 0.35$$

$$H_1: \theta < 0.35$$

Prática de  
desporto pelos  
residentes de  
um concelho

# Ensaio de Hipóteses

## 3. Hipóteses



Hipótese  
nula



Hipótese  
alternativa

Em resumo:

$$\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta \quad (*)$$

$$\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$$

**Muito importante:** - a igualdade aparece sempre na  $H_0$

- valores que o parâmetro pode assumir em  $H_1$  (\*)  
são complementares dos valores de  $H_0$

# Ensaio de Hipóteses

## 4. Escolha da estatística teste

Questão de interesse	Informação	Estatística teste
Peso das maçãs do pomar	Peso de cada maçã da amostra	Peso médio na amostra - $\bar{X}$
Variação no comprimento dos saltos	Comprimento de cada salto na amostra	Variância do comprimento dos saltos na amostra - $S'^2$
Proporção que pratica desporto	Se cada elemento na amostra pratica ou não desporto	Proporção na amostra que pratica desporto - $\bar{X}$

# Ensaio de Hipóteses

## 5. Distribuição da estatística teste

### Estatística teste

Peso médio na amostra -  $\bar{X}$

Variância do comprimento dos saltos na amostra -  $S'^2$

Proporção na amostra que pratica desporto -  $\bar{X}$

### Distribuição

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \text{ ou } \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$\frac{(n-1)S'^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$$

$$\frac{\bar{X} - \theta}{\sqrt{\frac{\theta(1-\theta)}{n}}} \sim N(0, 1)$$

# Ensaio de Hipóteses

## 6. Regra de decisão: Rejeitar $H_0$ ou não rejeitar $H_0$

Decisão é tomada tendo por referência a **Região de Rejeição**

**Região de Rejeição\Crítica** -  $W$  é um subconjunto do espaço amostra, tal que:

- se  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in W$ , *rejeita* – se  $H_0$ ;

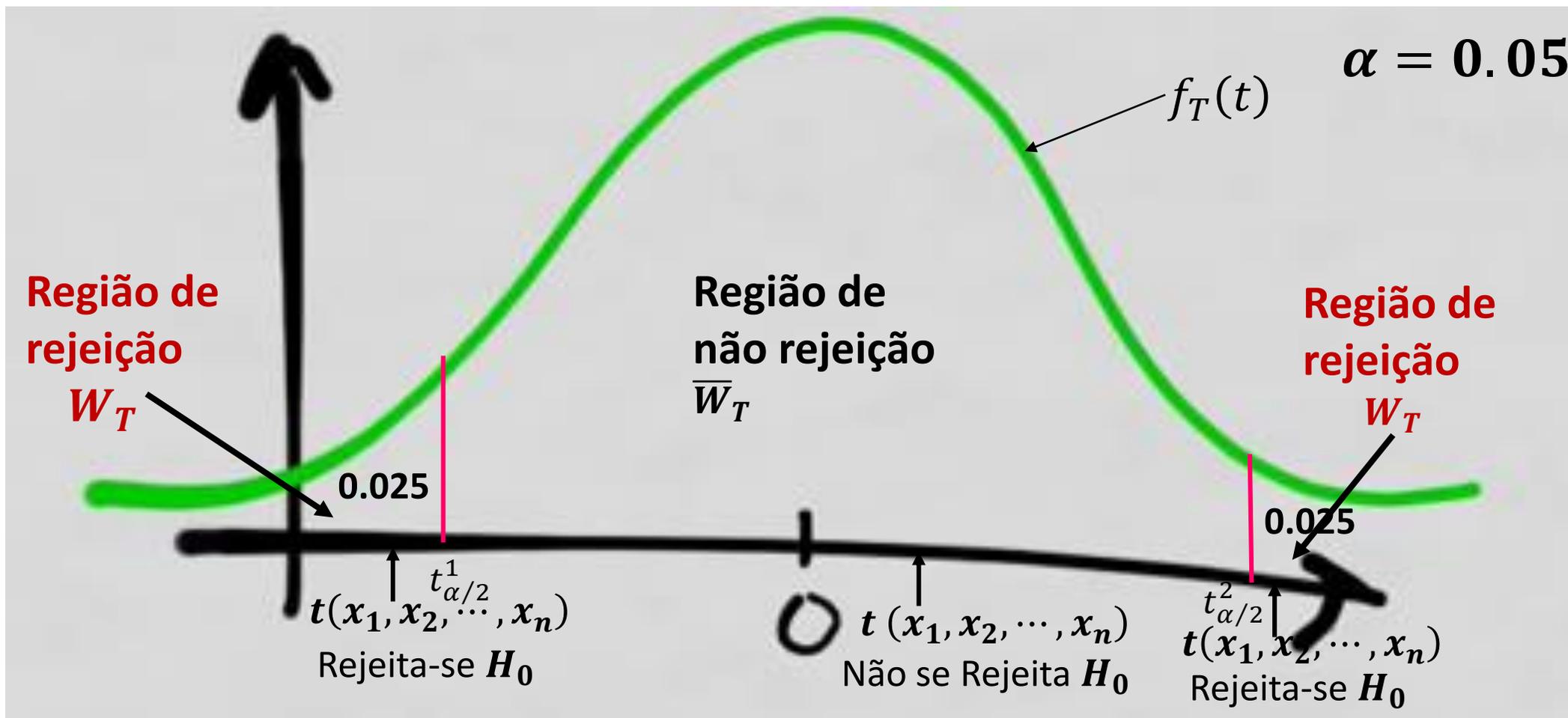
- se  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \bar{W}$ , *não se rejeita*  $H_0$

**Notas:**  $W \cup \bar{W} = \mathbb{R}^n$  e  $W \cap \bar{W} = \emptyset$

**Atenção:** como  $W \subset \mathbb{R}^n$  pode ser complicado dizer se uma amostra particular pertence ou não a  $W$ . A utilização de uma estatística teste  $T(X_1, X_2, \dots, X_n)$  e definição de uma região de rejeição  $W_T$  resolve esta dificuldade.

# Ensaio de Hipóteses

Definido um **nível de significância**  $\alpha$ , define-se a Região de Rejeição  $W_T$  com base na distribuição por amostragem da estatística teste  $T$ .



# Ensaio de Hipóteses

Quando tomamos uma decisão podemos cometer dois tipos de erros:

**Erro tipo 1:** rejeitar  $H_0$  e  $H_0$  ser verdadeira

**Erro tipo 2:** não rejeitar  $H_0$  e  $H_0$  ser falsa

Situação	$H_0$ verdadeira	$H_0$ falsa
Decisão tomada		
Rejeitar $H_0$	<b>Erro de 1ª espécie</b>	<b>Decisão correcta</b>
Não rejeitar $H_0$	<b>Decisão correcta</b>	<b>Erro de 2ª espécie</b>

# Ensaio de Hipóteses

Considere-se  $H_0: \theta = \theta_0$  contra  $H_A: \theta = \theta_1$

$$P(\text{rejeitar } H_0 | H_0 \text{ verdadeira}) = P((X_1, X_2, \dots, X_n) \in W_T | \theta = \theta_0) = \alpha$$

$$P(\text{não rejeitar } H_0 | H_0 \text{ falsa}) = P((X_1, X_2, \dots, X_n) \in \overline{W_T} | \theta = \theta_1) = 1 - \beta$$

$$P(\text{rejeitar } H_0 | H_0 \text{ falsa}) = P((X_1, X_2, \dots, X_n) \in W_T | \theta = \theta_1) = \beta$$

Dimensão do  
ensaio\teste

$P(\text{Erro } 2^{\text{a}})$

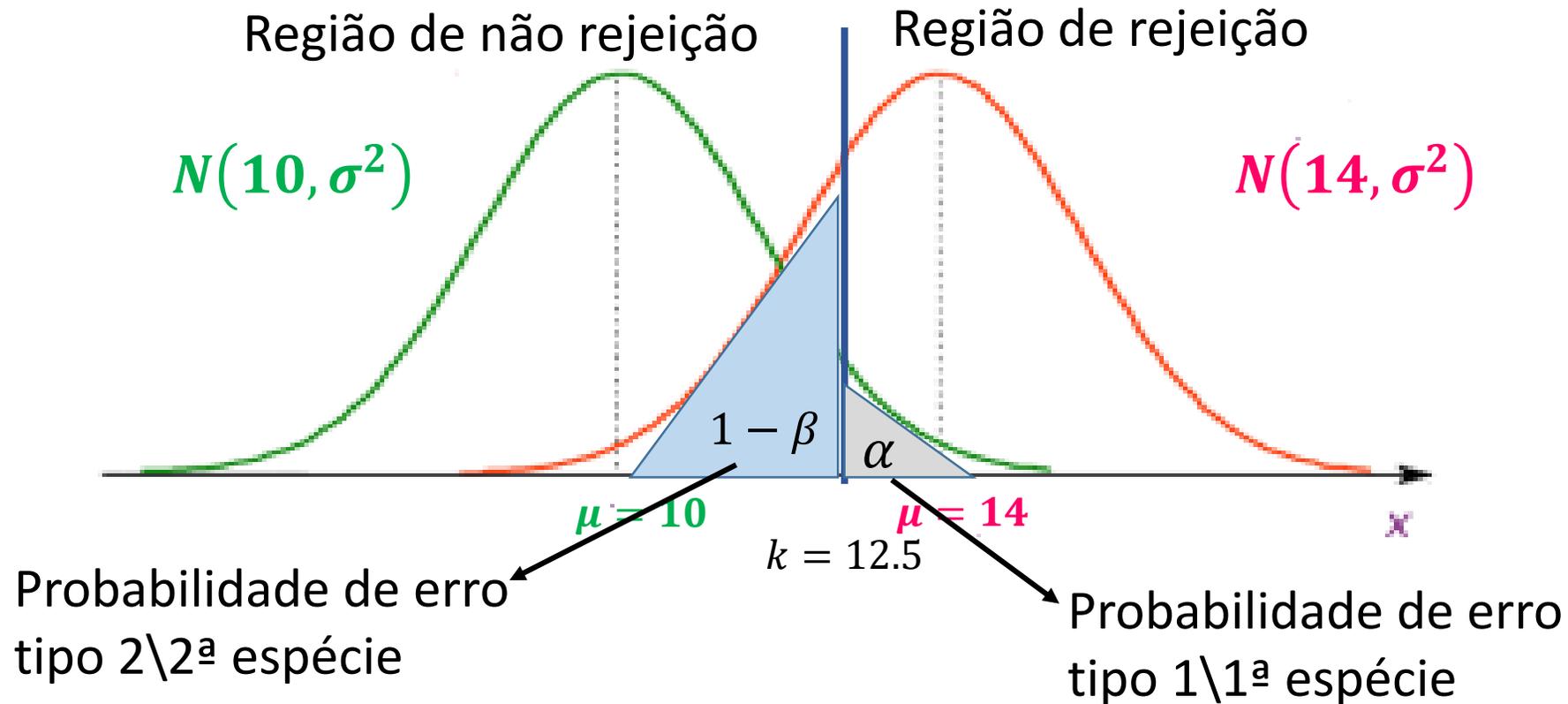
Potência do  
ensaio\teste

# Ensaio de Hipóteses

Seja uma população  $X \sim N(\mu, \sigma^2 = 4)$

Pretende-se testar  $H_0: \mu = 10$  contra  $H_1: \mu = 14$

$$W = \{\bar{x} : \bar{x} > k\}$$



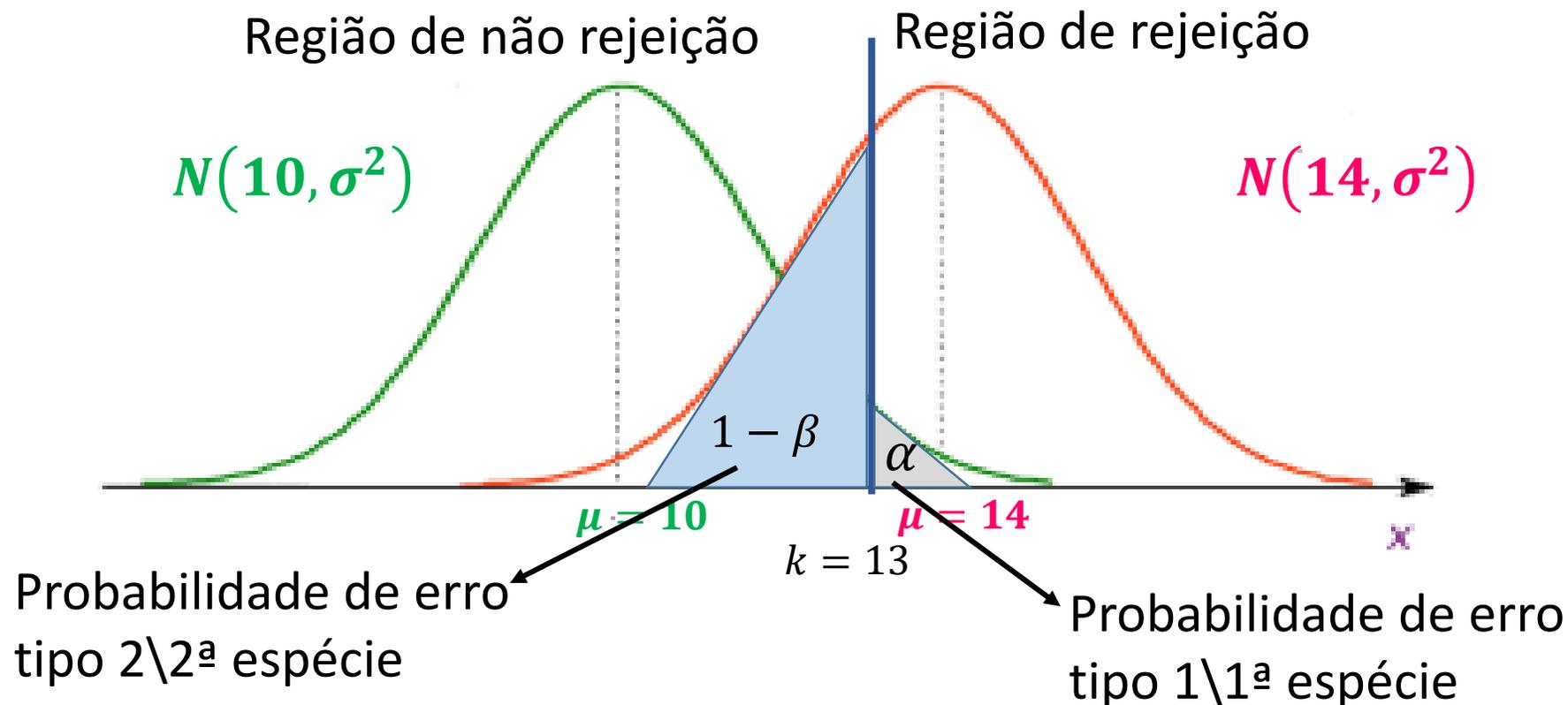
# Ensaio de Hipóteses

Seja uma população  $X \sim N(\mu, \sigma^2 = 4)$

Pretende-se testar  $H_0: \mu = 10$  contra  $H_1: \mu = 14$

$$W = \{\bar{x} : \bar{x} > k\}$$

Se se reduz  $\alpha$ , aumenta  $1 - \beta$



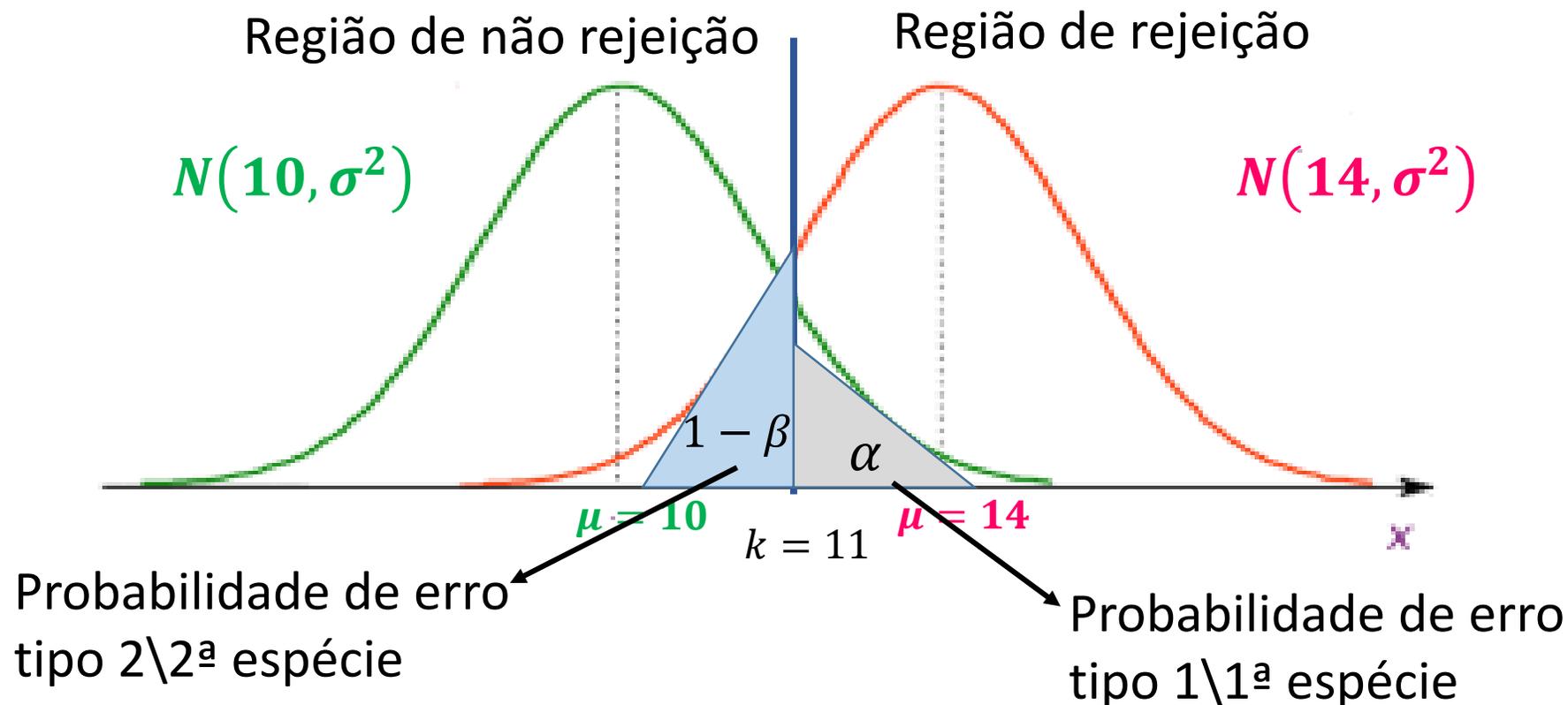
# Ensaio de Hipóteses

Seja uma população  $X \sim N(\mu, \sigma^2 = 4)$

Pretende-se testar  $H_0: \mu = 10$  contra  $H_1: \mu = 14$

$$W = \{\bar{x} : \bar{x} > k\}$$

Se se reduz  $1 - \beta$ , aumenta  $\alpha$



# Ensaio de Hipóteses

## 8. Teste mais potente – Lema de Neyman-Pearson

**Ideia importante:** A redução das duas probabilidades (ou de uma delas, supondo a outra fixa) só se consegue aumentando a dimensão da amostra.

Na impossibilidade de minimizar ambos os erros, o Lema Neyman-Pearson define o **teste mais potente** com base em dois critérios:

1. Fixar a probabilidade de erro tipo 1 ( $\alpha$ ) porque atribui a este erro maior importância. Em geral  $\alpha = 0,1, 0.05, 0.01$ . Apenas se rejeita  $H_0$  se houver forte evidência estatística contra esta hipótese.
2. Minimizar a probabilidade de erro tipo 2 ( $1 - \beta$ ) ou maximizar a potência do ensaio ( $\beta$ ).

A região de rejeição assim definida corresponde ao teste mais potente de dimensão  $\alpha$ .

# Ensaio de Hipóteses

**Regra intuitiva: No teste de médias, variâncias ou proporções a região de rejeição está do lado da alternativa quando se utiliza a estatística “natural”.**

Exemplos:

$$\mathbf{H}_0: \mu \leq 130 \text{ grs contra } \mathbf{H}_1: \mu > 130 \Rightarrow W_T = \{(x_1, x_2, \dots, x_n): \bar{x} > k\}$$

$$\mathbf{H}_0: \sigma^2 \geq 0.5 \text{ mts contra } \mathbf{H}_1: \sigma^2 < 0.5 \text{ mts} \Rightarrow W_T = \{(x_1, x_2, \dots, x_n): s'^2 < k\}$$

$$\mathbf{H}_0: \theta = 0.35 \text{ contra } \mathbf{H}_1: \theta = 0.4 \Rightarrow W_T = \{(x_1, x_2, \dots, x_n): \bar{x} > k\}$$

## Ensaio de Hipóteses

Exemplo: Seja uma população  $X \sim N(\mu, \sigma^2 = 4)$  e uma amostra  $n = 9$

Pretende-se testar  $H_0: \mu_0 = 10$  contra  $H_1: \mu_1 = 14$   $\alpha = 0.05$

$\mu_1 > \mu_0$  Então, (Lema Neyman Pearson – regra intuitiva)  $W_T = \{\bar{x} > k\}$

$k: P(\bar{X} > k | \mu = \mu_0) = \alpha \Leftrightarrow P(\bar{X} > k | \mu = 10) = 0.05 \Leftrightarrow P(\bar{X} \leq k | \mu = 10) = 0.95$

$\Rightarrow k = \text{invnorm}(0.95, 10, 2/3) = 11.097$

ou

$$k: P\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{k - 10}{2/3}\right) = 0.05 \Leftrightarrow P\left(Z > \frac{k - 10}{2/3}\right) = 0.05 \Leftrightarrow P\left(Z \leq \frac{k - 10}{2/3}\right) = 0.95$$

$$\Rightarrow \frac{k - 10}{2/3} = \text{invnorm}(0.95, 0, 1) = 1.645 \Rightarrow k = 10 + \frac{2}{3} * 1.645 = 11,1$$

# Ensaio de Hipóteses

Probabilidade de erro de 2ª espécie:

$$\begin{aligned}1 - \beta &= P(\text{n\~{a}o rejeitar } \mathbf{H}_0 | \mathbf{H}_0 \text{ falsa}) = P((X_1, X_2, \dots, X_n) \in W_T | \theta = \theta_1) \\ &= P(\bar{X} \leq 11.1 | \mu = 14) = \text{normal cdf}(-10000, 11.097, 14, 2/3) \approx 0\end{aligned}$$

Potência do ensaio:  $\beta \approx 1 - 0 = 1$

$$\begin{aligned}\beta &= P(\text{rejeitar } \mathbf{H}_0 | \mathbf{H}_0 \text{ falsa}) = P((X_1, X_2, \dots, X_n) \in W_T | \theta = \theta_1) \\ &= P(\bar{X} > 11.1 | \mu = 14) = 1 - \text{normal cdf}(11.1, 100000, 14, 2/3) \approx 1\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}&= P(\bar{X} > 11.1 | \mu = 14) = P\left(\frac{\bar{X} - \mu_1}{\sigma / \sqrt{n}} > \frac{11.1 - 14}{2/3}\right) = P(Z < -4,35) \\ &= P(Z \geq 4,35) = 1\end{aligned}$$

## Ensaio de Hipóteses

Retome-se o exemplo anterior: população  $X \sim N(\mu, \sigma^2 = 4), (X_1, X_2, \dots, X_n)$

Pretende-se testar  $H_0: \mu = 10$  contra  $H_1: \mu > 10$   $\alpha = 0.05$

$\mu_1 > \mu_0 \Rightarrow W = \{\bar{x} > k\}$  (Lema Neyman Pearson – regra intuitiva)

Cálculo de  $k$  faz-se exactamente do mesmo modo  $\Rightarrow W_T = \{\bar{x} > k(n)\}$

Com  $k(n) = 10 + 1.645 * \frac{2}{\sqrt{n}}$

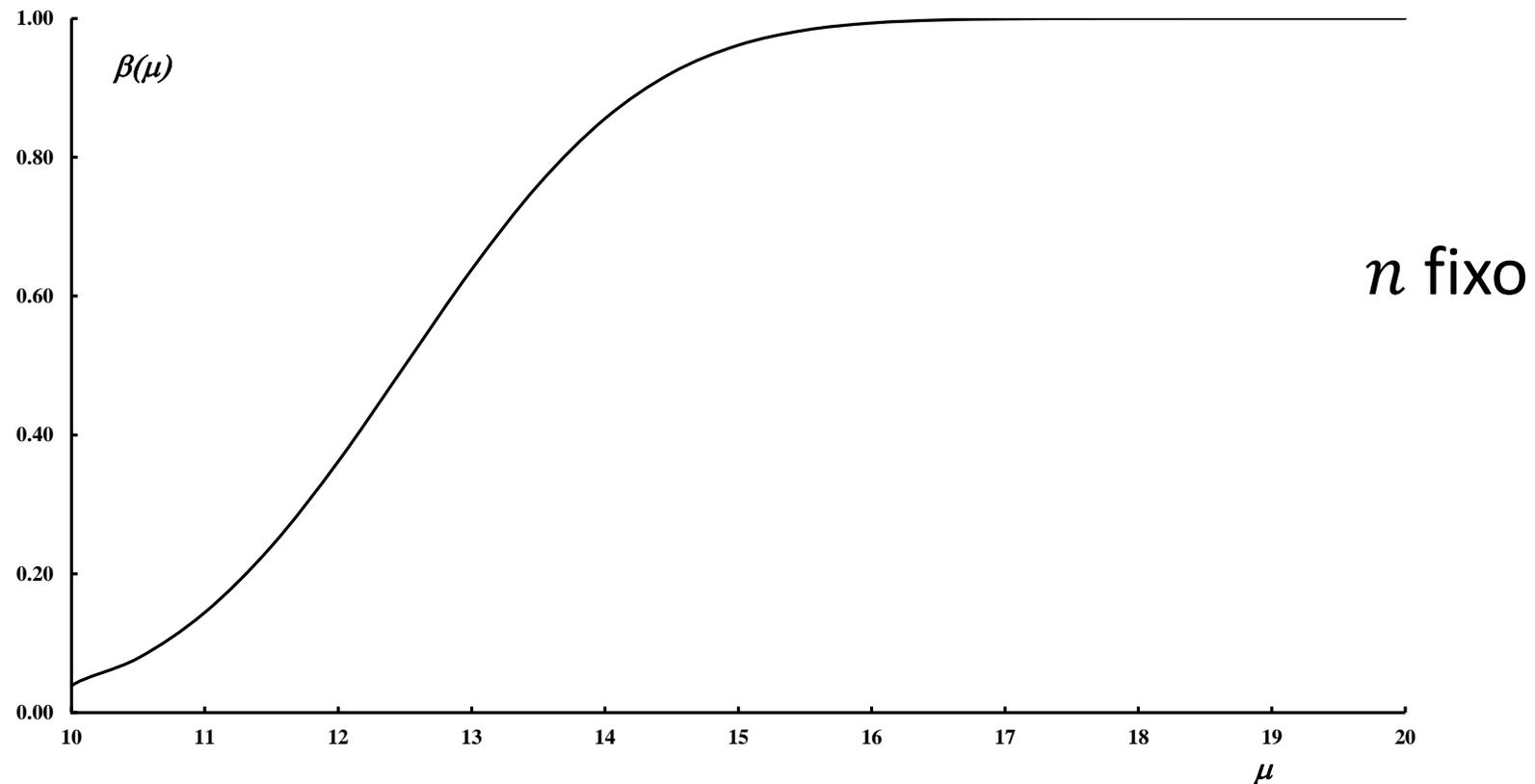
**Potência do ensaio** –  $\beta(\mu) = P(\text{rejeitar } H_0 | H_0 \text{ falsa}) = P((X_1, X_2, \dots, X_n) \in W_T | \mu > \mu_0)$

Função de  $\mu$  

$$\begin{aligned} &= P(\bar{X} > k(n) | \mu > 10) = P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} > \frac{k(n) - \mu}{2 / \sqrt{n}} | \mu > 10\right) \\ &= 1 - P\left(Z > \frac{k(n) - \mu}{2 / \sqrt{n}} | \mu > 10\right) = 1 - \Phi\left(\frac{k(n) - \mu}{2 / \sqrt{n}} | \mu > 10\right) \end{aligned}$$

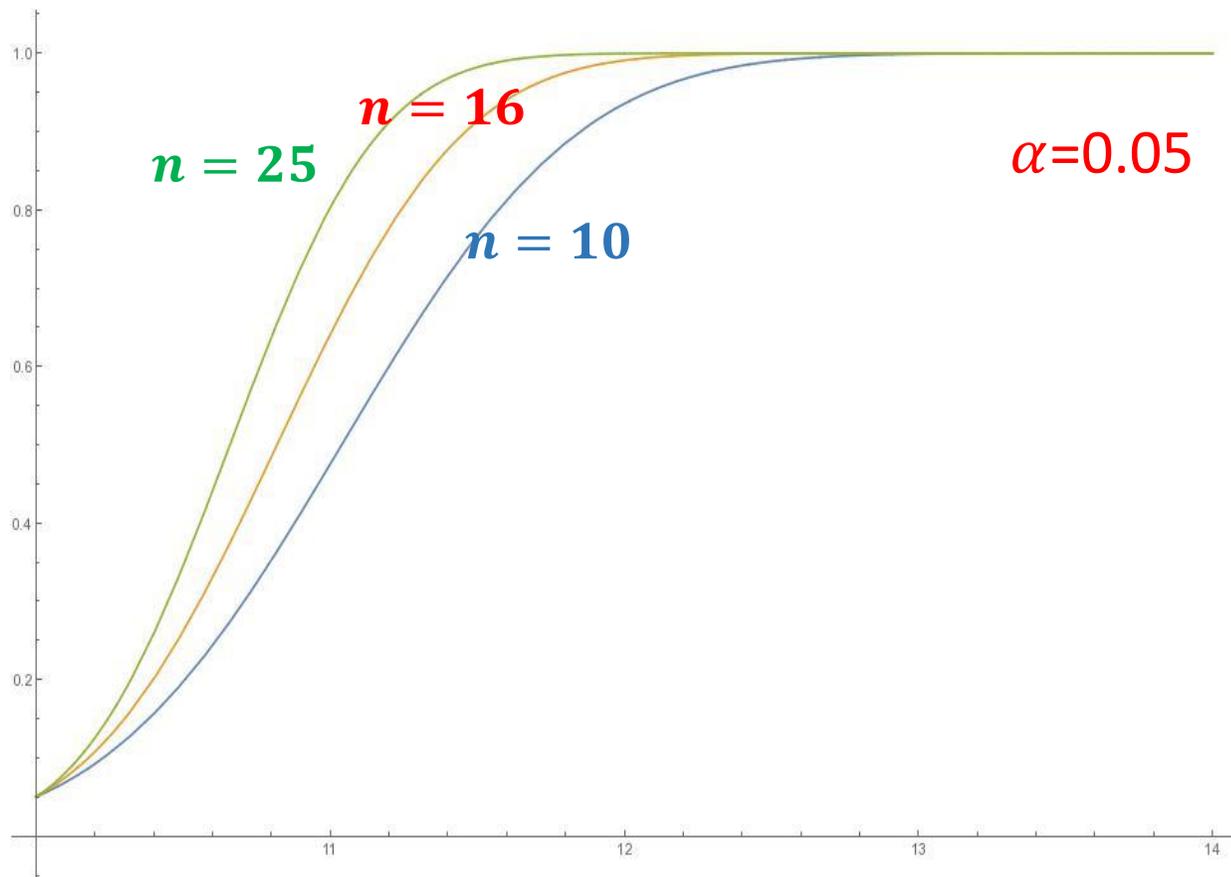
# Ensaio de Hipóteses

O gráfico que se segue ilustra a função potência  $\beta(\mu)$  para  $\mu > 10$



# Ensaio de Hipóteses

O que acontece à função potência quando, mantendo-se  $\alpha$  constante, aumenta a dimensão da amostra?



Notas:

. Fixado  $\alpha$ ,  $k(n)$  é função da dimensão da amostra  $n$ ;

- Para cada  $\mu > 10$ , quanto maior a dimensão da amostra mais elevada é a potência do teste.

# Ensaio de Hipóteses

Notas:

- Para testar  $H_0: \theta \leq \theta_0$  contra  $H_1: \theta > \theta_0$  procede-se como para testar  $H_0: \theta = \theta_0$  contra  $H_1: \theta > \theta_0$
- Para testar  $H_0: \theta \geq \theta_0$  contra  $H_1: \theta < \theta_0$  procede-se como para testar  $H_0: \theta = \theta_0$  contra  $H_1: \theta < \theta_0$
- Em ambos os casos está-se a escolher a pior situação.

# Ensaio de Hipóteses

Testes bilaterais:  $H_0: \theta = \theta_0$  contra  $H_1: \theta \neq \theta_0$

Numa situação destas é fácil entender que **não existe, em geral, um teste UMP.**

Se se retomar o exemplo anterior  $H_0: \mu = 10$  contra  $H_1: \mu \neq 10$ , tal corresponderia a ter simultaneamente 2 testes, quando:

- $\mu > 10$  ter-se-ia a região crítica  $W_T = \{\bar{x} > k\}$
  - $\mu < 10$  a região crítica  $W_T = \{\bar{x} < k\}$ .
- Isto não pode acontecer simultaneamente.

Para definir a região crítica recorre-se a uma regra intuitiva que consiste em considerar uma região de rejeição nas duas abas da distribuição da estatística

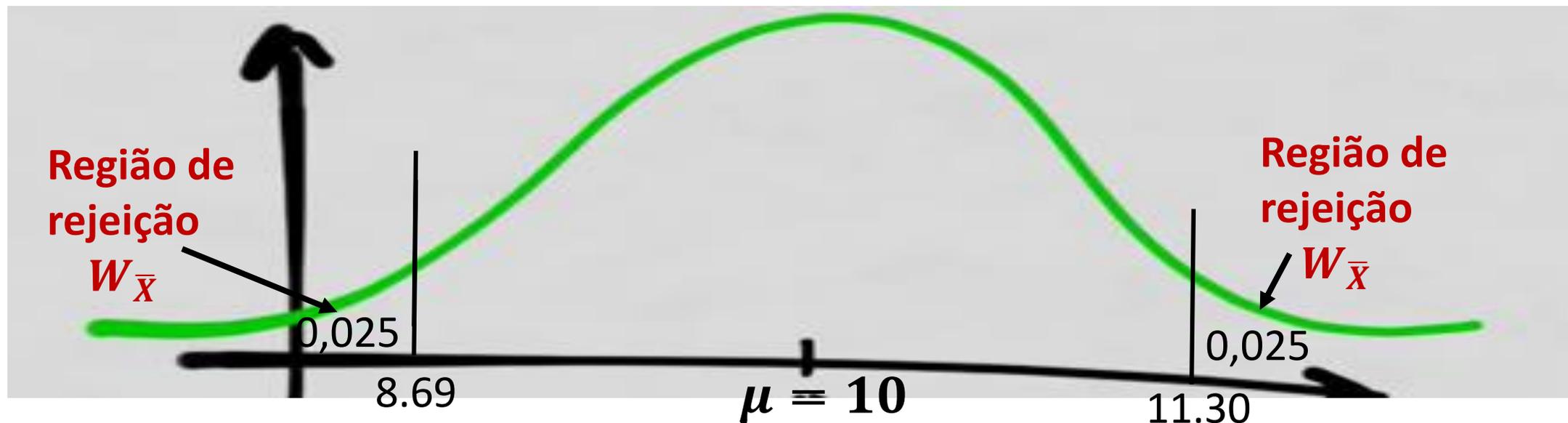
teste -  $W_T = \{\bar{x} < k_1 \cup \bar{x} > k_2\}$  com  $k_1, k_2: P(\bar{x} < k_1) = P(\bar{x} > k_2) = \alpha/2$ .

# Ensaio de Hipóteses

Testes bilaterais:  $H_0: \theta = \theta_0$  contra  $H_1: \theta \neq \theta_0$

Retome-se o exemplo anterior  $X \sim N(\mu, \sigma^2 = 4)$ ,  $n = 9$  e considere-se

o ensaio  $H_0: \mu = 10$  contra  $H_1: \mu \neq 10$        $\alpha = 0.05 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$



# Ensaio de Hipóteses

## Valor-p

Num teste de hipóteses fixada a dimensão  $\alpha$ , rejeita-se (ou não)  $H_0$  sem se ter em conta se a estatística teste  $T$  está longe ou perto do valor crítico  $k$ .

O **valor-p** é uma forma alternativa de reportar o resultado do teste que permite ultrapassar esta limitação.

Definição: Seja  $T(x_1, x_2, \dots, x_n) = t_{obs}$ . O **valor-p** é a probabilidade,  $p_{obs}$ , de observar um valor de  $t_{obs}$  tão ou mais desfavorável para  $H_0$ , admitindo  $H_0$  verdadeira

O **valor-p mede a evidência que os dados fornecem a favor de**  $H_0$ . Qto menor for o valor-p menor é a consistência dos dados com  $H_0$ , logo mais se rejeita  $H_0$ . Ex: se  $p_{obs} = 0.0001$  rejeita-se, se  $p_{obs} = 0,25$  não se rejeita. E se  $p_{obs} = 0.052$ ?

# Ensaio de Hipóteses

## Cálculo do Valor-p

Exemplo:  $X \sim N(\mu, \sigma^2 = 4)$ ,  $n = 16$ ,  $t(x_1, x_2, \dots, x_n) = t_{obs} = 11$

1. Obter a distribuição da estatística teste assumindo que  $H_0$  (ou o seu valor limite no caso de uma hipótese composta) é verdadeira.

$$H_0: \mu = 10 (\geq 10) \text{ contra } H_1: \mu < 10 \Rightarrow T = \bar{X} \sim N(10, 4/16)$$

2. Definir o acontecimento mais improvável do que o observado (+ para o lado da alternativa, depende de  $H_1$ ).

Os casos tão ou mais desfavoráveis para  $H_0$  correspondem a observar uma média amostral igual ou mais “afastada” de 10 do que o valor observado, 11.

3. Calcular a sua probabilidade.

$$p_{obs} = P(\bar{X} \leq 11 | \mu = 10) = 0,98 \Rightarrow \text{não se rejeita } H_0$$

# Ensaio de Hipóteses

## Cálculo do Valor-p

Exemplo:  $X \sim N(\mu, \sigma^2 = 4)$ ,  $n = 16$ ,  $T(x_1, x_2, \dots, x_n) = t_{obs} = 11$

1.  $H_0: \mu = 10$  ( $\leq 10$ ) contra  $H_1: \mu > 10 \Rightarrow T = \bar{X} \sim N(10, 4/16)$
2. Os casos tão ou mais desfavoráveis para  $H_0$  correspondem a observar uma média amostral igual ou mais “afastada” de 10 do que o valor observado, 11.
3.  $p_{obs} = P(\bar{X} \geq 11 | \mu = 10) = 1 - P(\bar{X} < 11 | \mu = 10) = 1 - 0,98 \approx 0.02 \Rightarrow$  rejeita-se  $H_0$  para um nível de significância  $\alpha = 0.05$

# Ensaio de Hipóteses

## Cálculo do Valor-p

Exemplo:  $X \sim N(\mu, \sigma^2 = 4)$ ,  $n = 16$ ,  $T(x_1, x_2, \dots, x_n) = t_{obs} = 11$

1.  $H_0: \mu = 10$  contra  $H_1: \mu \neq 10 \Rightarrow T = \bar{X} \sim N(10, 4/9)$

2. Os casos tão ou mais desfavoráveis para  $H_0$  correspondem a observar uma média amostral mais “afastada” de 10 do que o valor observado, 11 quer para valores inferiores quer para valores superiores.

$$3. p_{obs} = P(|\bar{X}| \geq 11 | \mu = 10) = P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq -2\right) + P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \geq 2\right) = 0.046$$

$\Rightarrow$  rejeita-se  $H_0$  para um nível de significância  $\alpha = 0.05$

# Ensaio de Hipóteses

**Populações normais**  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  – testes de médias

**1. Testes de medias com variância  $\sigma^2$  conhecida**

Estatística teste:  $\bar{X} \sim N(\mu_0, \sigma^2/n)$  ou  $\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

Aplicar a regra intuitiva para o tipo de ensaio escolhido

**2. Testes de medias com variância  $\sigma^2$  desconhecida**

Estatística teste:  $\frac{\bar{X} - \mu_0}{s'/\sqrt{n}} \sim t(n - 1)$

Aplicar a regra intuitiva para o tipo de ensaio escolhido

## Ensaio de Hipóteses

### 3. Populações Bernoulli $X \sim B(1, \theta)$ – teste à proporção amostral

$$\text{Estatística teste: } \bar{X} \sim N\left(\theta_0, \frac{\theta_0(1-\theta_0)}{n}\right) \text{ ou } \frac{\bar{X}-\theta_0}{\sqrt{\frac{\theta_0(1-\theta_0)}{n}}} \sim N(0, 1)$$

Aplicar a regra intuitiva para o tipo de ensaio escolhido

### 4. Populações Poisson $X \sim Po(\lambda)$ – teste à média

$$\text{Estatística teste: } \frac{\bar{X}-\lambda_0}{\sqrt{\frac{\lambda}{n}}} \sim N(0, 1)$$

Aplicar a regra intuitiva para o tipo de ensaio escolhido